Experimentos aleatorios. Espacio muestral

Def.- Un **fenómeno** o **experimento** decimos que es **determinista** si podemos conocer su resultado antes de ser realizado.

♦♦ Si dejamos caer un objeto desde cierta altura por efecto de la gravedad llegará al suelo. No hace falta hacer el experimento para saber lo que va a ocurrir.

♦♦ Si nos cortamos con un cuchillo pelando patatas nos saldrá sangre. No hace falta hacer falta cortarse para saber que nos saldrá sangre.

Def.- Un **fenómeno** o **experimento** decimos que es **aleatorio** si no podemos conocer su resultado antes de ser realizado, aunque se realice siempre con las mismas condiciones.

♦♦ Tiempo de duración de una lavadora. No lo sabremos hasta que se estropee

♦♦ Número que veremos en la cara superior de un dado cúbico (no trucado) al lanzarlo. Hasta no lancemos el dado no sabremos que número sale.

♦♦ Carta obtenida al sacar una carta de una baraja española (baraja no trucada). Hasta que no saquemos la carta no sabremos cual es.

Nota.- La probabilidad se dedica al estudio de los fenómenos o experimentos aleatorios**.**

Def.- El **Espacio muestral** es el conjunto de **todos los resultados** posibles de un experimento. Lo denominaremos por la letra **E**.

♦♦ Experimento lanzar un dado cúbico y observar que número aparece.

Llamamos “i” a salir el número “i” al lanzar el dado.

E = {1,2,3,4,5,6}

Nota.- las llaves { } indican conjunto, y lo que ha dentro son sus elementos.

♦♦ Experimento lanzar una moneda y observar que se obtiene. Excluimos el que quede de canto

Llamamos “C” a salir el “cara”, y “X” a salir el número “cruz” al lanzar la moneda.

E = {C,X}

♦♦ Experimento lanzar dos monedas y observar que se obtiene. Excluimos el que quede de canto

Llamamos “C” a salir el “cara”, y “X” a salir el número “cruz” al lanzar cada moneda.

E = {CC,CX,XC,XX}

Nota.- El lanzar dos monedas se puede considerar como el lanzar una sola moneda dos veces.

Sucesos

Def.- A todos los subconjuntos del espacio muestral E de un experimento aleatorio se les llama **sucesos**.

Nota.- Para designar cualquier suceso, también llamado **suceso aleatorio**, de un experimento aleatorio utilizaremos letras mayúsculas.

♦♦ Experimento lanzar un dado cúbico y observar que número aparece.

E = {1,2,3,4,5,6}

A = salir nº par = {2,4,6}

B = salir nº múltiplo de 3 = {3,6}

C = salir nº mayor o igual de 4 = {4,5,6}

♦♦ Experimento lanzar dos monedas y observar que se obtiene. Excluimos el que quede de canto.

E = {CC,CX,XC,XX}

A = salir dos caras = {C,C}

B = no salir ninguna cara = {X,X}

C = salir nº mayor o igual de 4 = {4,5,6}

♦♦ Experimento lanzar dos monedas y observar que se obtiene. Excluimos el que quede

Def.- Al conjunto de todos los sucesos que ocurren en un experimento aleatorio se le llama **espacio de sucesos** y se designa por **S**

Tipos de sucesos

Para todas las definiciones suponemos: Experimento lanzar un dado cúbico y observar que número aparece. Sabemos que su espacio muestral es E = {1,2,3,4,5,6}

Def.- Sucesos elementales son los todos resultados individuales del experimento aleatorio.

♦♦ De E = {1,2,3,4,5,6} tenemos los sucesos elementales {1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6}

Def.- Sucesos compuestos son los que están formados por dos o más resultados del experimento; es decir, por dos o más sucesos elementales.

♦♦ De E = {1,2,3,4,5,6} tenemos los sucesos compuestos A = {1,4}, B = {1,4,6}.

Def.- Suceso seguro es el que se verifica siempre al realizar el experimento aleatorio. Coincide con el espacio muestral **E**.

♦♦ De E = {1,2,3,4,5,6} tenemos el suceso seguro E = {1,2,3,4,5,6}.

Def.- Suceso imposible es el que no se verifica nunca. Se representa por Φ.

♦♦ De E = {1,2,3,4,5,6} tenemos el suceso imposible Φ = {salir cara}. El salir cara no tiene nada que ver con el experimento lanzar un dado con espacio muestral E={1,2,3,4,5,6}

Nota.- Se demuestra que si el espacio muestral E, de un experimento aleatorio, tiene n elementos, entonces dicho experimento tiene 2^n sucesos.

♦♦ En el experimento aleatorio de lanzar una moneda al aire hemos visto que el espacio muestral es: E= {C, X}. Vemos que hay dos elementos .

Todos los posibles sucesos de dicho experimento es el conjunto {{Φ}, {C}, {X}, {E}}, es decir está formado por el suceso imposible, el suceso seguro y los sucesos cara y cruz.

Operaciones con sucesos

Nota.- Suponemos que se ha realizado un experimento aleatorio y asociado a él hay un **espacio muestral E**. Todos los sucesos A, B, C, etc.. de las definiciones siguientes pertenecen al espacio muestral E.

Para todas las operaciones suponemos: Experimento lanzar un dado cúbico y observar que número aparece. Sabemos que su espacio muestral es E = {1,2,3,4,5,6}

Def.- Si tenemos dos sucesos A y B de un mismo experimento aleatorio, llamamos **suceso unión de A y B** al suceso que se realiza cuando lo hacen A ó B (se hace A, se hace B o los dos a la vez). Se representa por **$A \cup B$**.

♦♦ De E = {1,2,3,4,5,6} tenemos los sucesos compuestos A = {1,2,4}, B = {1,4,6}.

$A \cup B$ = {1,2,4,6}. Se ponen primero todos los elementos de A y después se añaden los de B que no se encuentren ya puestos.

Recordamos que en un conjunto no se pueden repetir los elementos y no hay orden en la forma de colocar los elementos.,

Def.- Si tenemos dos sucesos A y B de un mismo experimento aleatorio, llamamos **suceso intersección de A y B** al suceso que se realiza cuando lo hacen a la vez A y B. Se representa por $A \cap B$.

♦♦ De E = {1,2,3,4,5,6} tenemos los sucesos compuestos A = {1,2,4}, B = {1,4,6}.

$A \cap B$ = {1,4}. Se ponen los elementos que están a la vez en A y en B.

Nota.- A veces que la $A \cap B = \Phi$, que es el suceso imposible, en este caso decimos que los sucesos A y B son **incompatibles**. Cuando $A \cap B \neq \Phi$, decimos que A y B son **compatibles**.

Def.- Para un suceso cualquiera A de un experimento aleatorio, llamamos **suceso contrario** del A, y se escribe A^C, al suceso que se verifica cuando no se verifica el A y recíprocamente.

♦♦ De E = {1,2,3,4,5,6} tenemos los sucesos compuestos A = {1,2,4}, B = {1,4,6}.

A^C = {3,5,6}. Los que están en E y no están en A.

B^C = {2,3,5}. Los que están en E y no están en B.

Nota.- Las **propiedades** más significativas de los **sucesos contrarios son**

1.- $AUA^c = E$ 2.- $A \cap A^c = \Phi$ 3.- $E^c = \Phi$ 4.- $\Phi^c = E$

Def.- Llamamos **suceso diferencia**, que se escribe A – B, como el suceso que se verifica cuando se verifica el A y no el B, es decir $A - B = A \cap B^C$. Análogamente se define $B - A = B \cap A^C$.

♦♦ De E = {1,2,3,4,5,6} tenemos los sucesos compuestos A = {1,2,4}, B = {1,4,6}.

A – B = {2}. A los elementos de A les quitamos los que haya repetidos en B.

B – A = {6}. A los elementos de B les quitamos los que haya repetidos en A.

Nota.- Estas operaciones unión, intersección y complementación (contrario) verifican las siguientes propiedades:

	UNIÓN	**INTERSECCIÓN**
1. Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
2. Asociativa	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
3. Idempotente	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
4. Simplificación	$A \cup (B \cap A) = A$	$A \cap (B \cup A) = A$
5. Distributiva	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
6. Elementos neutros	$A \cup \Phi = A$	$A \cap E = A$
7. Absorción	$A \cup E = E$	$A \cap \Phi = \Phi$
8. <u>**Leyes de Morgan**</u>	$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$	$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

Las *<u>leyes de Morgan</u>* son importantísimas y se utilizarán para calcular probabilidades.

♦♦Tenemos una urna con nueve bolas numeradas del 1 al 10. Realizamos el experimento, sacar una bola de la urna, anotar el número y devolverla a la urna. Consideramos los siguientes sucesos. A = {salir un número primo} y B = {salir un número par}.

a) Calcula los sucesos $A \cup B$ y $A \cap B$.

b) Los sucesos A y B, ¿son compatibles o incompatibles?

c) Encuentra los sucesos contrarios de A y B.

<u>**sol**</u>

El espacio muestral es E = {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}

Los sucesos A y B son A = {2,3,5,7} y B = {2,4,6,8,10}, a partir de ellos, tenemos.

a) $A \cup B$ = {2,3,5,7,4,6,8,10) y $A \cap B$ = {2}

b) Al ser $A \cap B$ = {2}, los sucesos A y B son compatibles.

c) El suceso contrario de A = {2,3,5,7} es A^C = {1,4,6,8,9,10}

El suceso contrario de B = {2,4,6,8,10} es B^C = {1,3,5,7,8,9}

Probabilidad

Nota.- El concepto de probabilidad admite varias definiciones.

Definición de Probabilidad de Laplace. Si todos los sucesos elementales de un espacio muestral E, asociado a un experimento aleatorio son **equiprobables** (tienen la misma posibilidad de ocurrir), se define la probabilidad de un suceso A, que se escribe p(A), como el número que resulta de dividir el número de casos favorables a que ocurra el suceso A entre el número total de casos posibles al realizar el experimento, es decir

$$p(A) = \frac{\text{nº casos favorables a que ocurra A}}{\text{nº casos posibles de E}}$$

♦♦Tenemos una urna con nueve bolas numeradas del 1 al 10. Realizamos el experimento, sacar una bola de la urna, anotar el número y devolverla a la urna. Consideramos los siguientes sucesos. A = {salir un número primo} y B = {salir un número par}.

a) Calcula los p(A) y p(B).

b) Calcula los $p(A\cup B)$ y $p(A\cap B)$.

Sol.

E = {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10};

A = {2,3,5,7}; B = {2,4,6,8,10}; $A\cup B$ = {2,3,5,7,4,6,8,10) y $A\cap B$ = {2}.

a) y b)

$$p(A) = \frac{\text{nº casos favorables a que ocurra A}}{\text{nº casos posibles de E}} = 4/10 = 2/5$$

$$p(B) = \frac{\text{nº casos favorables a que ocurra B}}{\text{nº casos posibles de E}} = 5/10 = 1/2$$

$$p(A\cup B) = \frac{\text{nº casos favorables a que ocurra } A\cup B}{\text{nº casos posibles de E}} = 8/10 = 4/5$$

$$p(A\cap B) = \frac{\text{nº casos favorables a que ocurra } A\cap B}{\text{nº casos posibles de E}} = 1/10.$$

♦♦Lanzamos una moneda.

a) Calcula la probabilidad de salir cara.

b) Calcula la probabilidad de salir cruz

Sol.

a) y b) Sea C el suceso salir cara, X el suceso salir cruz. Sabemos que E = {C,X}

$$p(C) = \frac{\text{nº casos favorables a que ocurra C}}{\text{nº casos posibles de E}} = 1/2$$

$p(X) = \dfrac{\text{nº casos favorables a que ocurra X}}{\text{nº casos posibles de E}} = 1/2$

♦♦Lanzamos dos monedas.

a) Calcula la probabilidad de salir dos caras.

b) Calcula la probabilidad de salir alguna cara.

b) Calcula la probabilidad de salir dos cruces.

Sol.

a) y b) Sea A el suceso salir dos caras, B el suceso salir al menos una cara y C el suceso salir dos cruces.

Sabemos que E = {CC,CX,XC,XX}; A = {CC}; B = {CC,CX,XC}; C = { XX}

$p(A) = \dfrac{\text{nº casos favorables a que ocurra A}}{\text{nº casos posibles de E}} = 1/4$

$p(B) = \dfrac{\text{nº casos favorables a que ocurra B}}{\text{nº casos posibles de E}} = 4/4$

$p(C) = \dfrac{\text{nº casos favorables a que ocurra C}}{\text{nº casos posibles de E}} = 1/4$

Nota.- Como ya dijimos antes el lanzar dos dados se puede considerar como el lanzar u dado dos veces.

Se demuestra que el número de casos posibles al realizar un experimento varias veces es igual al nº de casos posibles del experimento individual multiplicado por si mismo tantas veces como se realice el experimento.

♦♦Lanzo una moneda, nº de casos favorables = 2. Número de elementos de E.

♦♦Lanzo dos monedas, nº de casos favorables = 2x2 = 4. Número de elementos de E.

♦♦Lanzo tres monedas, nº de casos favorables = 2x2x2 = 8. Número de elementos de E.

♦♦Lanzamos un dado cúbico, con las caras numeradas del 1 al 6.

a) Calcula la probabilidad de A = {1, 6}.

b) Calcula la probabilidad de B = nº primo.

b) Calcula la probabilidad de C = salir nº mayor de 2.

Sol.

a) b) y c)

Sea A = {1, 6}, B = nº primo = {2,3,5}, C = {2,3,4,5,6}. Sabemos que E = {1,2,3,4,5,6}.

$p(A) = \dfrac{\text{nº casos favorables a que ocurra A}}{\text{nº casos posibles de E}} = 2/6 = 1/3$

$p(B) = \dfrac{\text{nº casos favorables a que ocurra B}}{\text{nº casos posibles de E}} = 3/6 = 1/2$

p(C) = $\frac{\text{nº casos favorables a que ocurra C}}{\text{nº casos posibles de E}}$ = 5/6

♦♦Lanzamos dos dados cúbicos, con las caras numeradas del 1 al 6.

a) Calcula la probabilidad de A = suma de los números de las caras superiores sea 7.

b) Calcula la probabilidad de B = producto de los números de las caras superiores sea 12.

b) Calcula la probabilidad de C = "suma de los números de las caras superiores sea 7 y el producto de los números de las caras superiores sea 12".

Sol.

a) b) y c)

Sabemos que el número de casos posibles de E es 6x6 = 36 (6 veces de cada dado)

Tenemos A = {1-6;6-1;2-5;5-2;3-4;4-3}, B = {2-6;6-2;3-4;4-3} y C = $A \cap B$ = {3-4;4-3}.

p(A) = $\frac{\text{nº casos favorables a que ocurra A}}{\text{nº casos posibles de E}}$ = 6/36 = 1/6

p(B) = $\frac{\text{nº casos favorables a que ocurra B}}{\text{nº casos posibles de E}}$ = 4/36 = 1/9

p(C) = $\frac{\text{nº casos favorables a que ocurra C}}{\text{nº casos posibles de E}}$ = 2/36 = 1/18

♦♦Sacamos una carta de una baraja española (tiene 40 cartas, 4 palos con 10 cartas cada una numeradas del 1 al 7 junto con una sota, un caballo y un rey. Los palos son copas, espadas, oros y bastos. Hay 4 ases (el número 1), 12 figuras (sotas, caballos y reyes).

a) Calcula la probabilidad de obtener figura.

b) Calcula la probabilidad de obtener oros.

c) Calcula la probabilidad de ases.

d) Calcula la probabilidad de obtener as de oros.

Sol.

a) b) c) y d)

Sabemos que el número de casos posibles de E es 40.

Llamamos A = obtener figura, B = obtener oros, C = obtener ases, D = obtener as de oros.

Sabemos que el número de casos posibles de A es 12. (hay 12 figuras, 3 por palo)

Sabemos que el número de casos posibles de B es 10. (cada palo tiene 10 cartas)

Sabemos que el número de casos posibles de C es 4. (La baraja tiene 4 unos)

Sabemos que el número de casos posibles de D es 1. (sólo hay un as de oros)

p(A) = $\frac{\text{nº casos favorables a que ocurra A}}{\text{nº casos posibles de E}}$ = 12/40 = 3/10

$$p(B) = \frac{\text{nº casos favorables a que ocurra B}}{\text{nº casos posibles de E}} = 10/40 = 1/4$$

$$p(C) = \frac{\text{nº casos favorables a que ocurra C}}{\text{nº casos posibles de E}} = 4/40 = 1/10$$

$$p(D) = \frac{\text{nº casos favorables a que ocurra D}}{\text{nº casos posibles de E}} = 1/40$$

Definición Axiomática de Probabilidad (Kolmogoroff 1933)

Def.- Sea E el espacio muestral de un cierto experimento aleatorio, A un suceso de E, se define la **probabilidad** del suceso A, que se escribe p(A) como un número real, que verifica los siguientes axiomas (propiedad que se afirma y no se puede demostrar):

Axioma 1.- La probabilidad del suceso seguro o espacio muestral E es 1, es decir **p(E)=1**

Axioma 2.- Cualquiera que sea el suceso A, su probabilidad es un número entre 0 y 1, es decir **$0 \le p(A) \le 1$**

Axioma 3.- Si A y B son dos sucesos incompatibles, $A \cap B = \phi$, entonces la probabilidad del suceso unión es la suma de las probabilidades de cada uno de los sucesos, es decir **p(AUB) = p(A) + p(B)**

♦♦¿Cuál de las siguientes funciones definen una probabilidad en E = {A, B, C}?

a) p(A) = 1/4, p(B) = 1/3, p(C) = 1/2   b) p(A) = 2/3, p(B) = -1/3, p(C) = 2/3

c) p(A) = 1/6, p(B) = 1/3, p(C) = 1/2   d) p(A) = 0, p(B) = 1/3, p(C) = 2/3

sol

a) *p* no es una probabilidad, ya que *p(E)* = p*(A)* + p*(B)* + p*(C)* = 1/4 + 1/3 + 1/2 = 13/12 $\neq$ 1.

b) P no es una probabilidad, al ser *P(B)* = -1/3 y no cumplir el axioma 2.

c) *P* es una probabilidad. Puede comprobarse sin dificultad que cumple los tres axiomas.

d) Ocurre la misma circunstancia que en el caso anterior.

Propiedades de la Probabilidad.-

1.- Para sucesos contrarios A y A^c se cumple **$p(A^c) = 1 - p(A)$**

2.- La probabilidad del suceso imposible ϕ es 0, es decir **$p(\phi) = 0$**

3.- Si A y B son sucesos compatibles, $A \cap B \neq \phi$, entonces la probabilidad de la unión es

$$\mathbf{p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)}$$

♦♦En una determinada fábrica de automóviles, el 6% de los coches tiene defectos en el motor, el 8% tiene defectos en la carrocería y el 2% tiene defectos en ambos. a) ¿Cuál es la probabilidad de que un coche tenga al menos un defecto? b) ¿y la probabilidad de que un coche no sea defectuoso?

sol

Llamamos A al suceso "el coche tiene defectuoso el motor" y B al suceso "el coche tiene defectuoso la carrocería". Los datos que proporciona el enunciado son:

p(A) = 6% = 0,06; p(B) = 8% =0,08 y $p(A \cap B)$ = 2% =0,02

a) Nos piden calcular $p(A\cup B)$.

Por la fórmula $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$, tenemos $p(A\cup B)$ = 0'06 + 0'08 – 0'02 = = 0,12

b) Se pide calcular la probabilidad del suceso "el coche no posea ningún defecto" $(AUB)^C$.

Utilizando la propiedad de la propiedad de los sucesos contrarios, tenemos:

Tenemos p(ningún defecto) = p($(AUB)^C$) = 1 - $p(A\cup B)$ = 1 - p(algún defecto) = 1 - 0,12 = = 0,88

Experimentos compuestos. Diagramas de árbol. Tablas de contingencia

Def.- Llamamos **experimentos compuestos** a los formados por varios experimentos simples que se efectúan consecutivamente.

Nota.- La **probabilidad** de un suceso elemental de un espacio compuesto puede calcularse multiplicando las probabilidades de los sucesos elementales que conforman la experiencia compuesta.

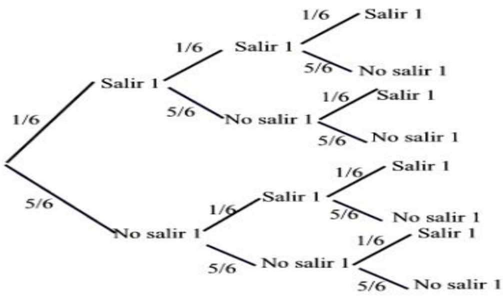
Nota.- Los diagramas de árbol, son una herramienta muy útil en la descripción de los experimentos compuestos y en el cálculo de probabilidades asociadas a estas experiencias.

Hay que tener en cuenta que la suma de las probabilidades de las ramas que paren de un mismo nodo vale 1 (p(E) = 1). Si seguimos una rama desde el comienzo hasta el final del árbol se multiplican las probabilidades que te vas encontrando en cada rama, y por último si cambiamos de rama tenemos que sumar. (Más adelante se justificará un poco). Veámoslo en los siguientes ejemplos.

♦♦Dos personas, A y B, organizan el siguiente juego: Tiran un dado tres veces. Si sale algún 1, gana A. Si no sale ningún 1, gana B. ¿Cuál de las dos personas tiene más probabilidades de ganar?

sol

Calculamos las probabilidades de ganar de cada una de las personas. Las probabilidades asociadas a cada una de las tiradas pueden verse en el diagrama de árbol adjunto.



La probabilidad de que no salga el número 1 al tirar un dado es 5/6, y la probabilidad de que no salga ningún 1 al tirar el dado tres veces es 5/6 .5/6 .5/6 = $(5/6)^3$.

De esta forma tenemos que:

La probabilidad de que gane B es p(no sale ningún 1) = $(5/6)^3$ = 0,5787

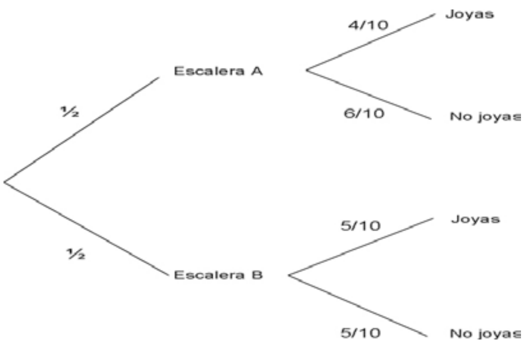
La probabilidad de que gane A es p(sale algún 1) = 1 - $(5/6)^3$ = 1 - 0,5787 = 0,4213

Se observa que tiene más probabilidades de ganar el jugador B.

♦♦Una casa tiene dos escaleras. la escalera A tiene 10 pisos, en cuatro de ellos hay joyas; en la escalera B, cinco pisos tienen joyas y cinco no. Un ladrón entra al azar en una de las escaleras y luego en uno de los pisos. ¿Cuál es la probabilidad de que entre en un piso con joyas?

<u>sol</u>

Teniendo en cuenta el diagrama de árbol con las probabilidades que aparecen en sus ramas, se obtiene la probabilidad siguiente:

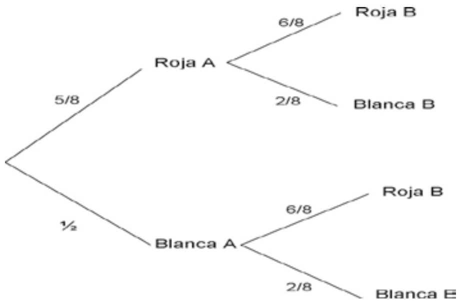


p(joyas) = p(joyas en escalera A) + p(joyas en escalera B) =1/2·1/4 + 1/2·5/10 = 9/20 =0,45

♦♦ Una urna, A, contiene 5 bolas rojas y 3 bolas blancas. Otra urna, B, contiene 2 bolas blancas y 6 rojas Si se saca una bola de cada urna, ¿cuál es la probabilidad de que sean de igual color?

<u>sol</u>

Procediendo como en el ejemplo anterior, los datos que aparecen en el diagrama de árbol nos permiten calcular la probabilidad siguiente:



P(bolas mismo color) = P(RR o BB) = P(RR) + P(BB) = 5/6·6/8 + 3/8·2/8 = 36/64 = 0,5625

♦♦En una casa hay tres llaveros A, B y C, el primero con 5 llaves, el segundo con 7 y el tercero con 8, de las que sólo una de cada llavero abre la puerta del trastero. Se escoge al azar un llavero y, de el, una llave para Intentar abrir el trastero. Se pide:

a) ¿Cuál será la probabilidad de que se acierte con la llave?

b) ¿Cuál será la probabilidad de que el llavero escogido sea el tercero y la llave no abra?.

<u>sol</u>

Los datos del diagrama de árbol adjunto nos permiten calcular las probabilidades del enunciado.

a) p(acierte) = p(acierte con llavero A)+p(acierte con llavero B)+ p(acierte con llavero C) =

= 1/3·1/5 + 1/3·1/7 + 1/3·1/8 =131/840 = 0,1560

b) p(no acierte con llavero C) = 1/3·7/8 = 7/24 = 0,2916

Nota.- Las **tablas de contingencia** son tablas de doble entrada, donde la suma de los número en horizontal y vertical dan los totales en horizontal o en vertical. Se puede pasar de tablas de contingencia a diagramas de árbol y viceversa.

♦♦Se ha seguido la pista a 100000 coches utilitarios durante un año. Éstos son de tres marcas distintas, A, B y C. Unos han tenido avería (Av) y otros no (no Av). Se reparten según los datos de la tabla adjunta.

	A	B	C
Av	650	200	150
No Av	49350	19800	29850

Calcula: Cual de la tres marcas es más segura.

<u>sol</u>

Completamos la tabla con los totales y aplicamos la fórmula de Laplace

	A	B	C	**Totales**
Av	650	200	150	**1000**
No Av	49350	19800	29850	**99000**
Totales	**50000**	**20000**	**30000**	**100000**

Para ver cuál es la marca más segura, calculamos la probabilidad de que el coche no se averíe en cada una de las marcas. Obtenemos:

P(no avería en marca A) = 49350/50000= 0,987

P(no avería en marca B) = 19800/20000 = 0,99

P(no avería en marca C) = 29850/30000 = 0,995

Se observa que la marca más segura es la C .

Probabilidad condicionada

Nota.- A veces, el valor de una probabilidad varía en función del conocimiento de determinadas informaciones relativas a estos sucesos.

Def.- Dado un espacio muestral E, y dos sucesos de E, el A y el B, con P(A) $\neq$ 0, se define la **probabilidad del suceso B condicionada al suceso A** (esto nos dice que conocemos p(A) antes de calcular p(B)), y se escribe p(B/A) como el cociente p(B/A) $=\dfrac{p(A\cap B)}{p(A)}$.

Análogamente se define p(A/B) = $\dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$, con p(B) $\neq$ 0. (recordamos que $A\cap B=B\cap A$)

♦♦ Se lanzan dos dados:

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener una suma de puntos igual a 7?

b) Si la suma de puntos ha sido 7, ¿cuál es la probabilidad de que en alguno de los dados haya salido un tres?

Sol

Sean los sucesos A, la suma de los puntos es 7 y B, en alguno de los dados ha salido un tres.

a) Los casos posibles al lanzar dos dados son 6x6 = 36 y los casos favorables al suceso A son los seis siguientes: {(1-6); (6-1); (2-5); (5-2); (3-4); (4-3); y por tanto, p(A) = 6/36 = 1/6

b) En este caso, el suceso B/A es salir en algún dado 3, si la suma ha sido 7. Observamos que esta situación ocurre en las parejas (3,4) y (4,3). Por tanto, p(B/A) = 2/6 = 1/3

Probabilidad compuesta o del producto

Def.- La expresión $p(A\cap B) = p(A).p(B/A) = p(B).p(A/B)$ se llama **probabilidad compuesta o del producto**.

Nota.- Esta expresión se utiliza con más frecuencia, en la resolución de problemas, que la que aparece en la definición de probabilidad condicionada.

Nota.- Si nos damos cuenta cuando hemos utilizado los diagramas de árbol hemos usado la probabilidad condicionada y la fórmula de probabilidad del producto, sin mencionarlo.

Sucesos dependientes e independientes

Def.- Para dos sucesos A y B que pueden provenir de experiencias compuesta, decimos que son **independientes** si verifican que: **$p(A\cap B) = p(A).p(B)$**

Def.- Para dos sucesos A y B que pueden provenir de experiencias compuesta, decimos que A y B son **dependientes** si se verifica que: $p(A\cap B) \neq p(A).p(B)$

Nota.- Si dos sucesos A y B son independientes, sus sucesos contrarios, A^c y B^c, también son independientes.

♦♦ Determina si los sucesos A y B son dependientes o independientes, sabiendo que: $p(A) = 1/2$; $p(B) = 1/2$ y $p(A\cup B) = 3/4$

sol

Tenemos que ver si $p(A\cap B) = p(A).p(B)$.

Para obtener $p(A\cap B)$, usaremos la fórmula $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$. Sustituyendo tenemos $3/4 = 1/2 + 1/2 - p(A\cap B)$, de donde $p(A\cap B) = 1/2 + 1/2 - 3/4 = 1/4$.

Como $p(A).p(B) = 1/2 .1/2 = 1/4$, resulta que $p(A\cap B) = p(A).p(B)$, y los sucesos A y B son independientes.

Nota.- Aunque no se demuestre resulta que $p(A-B) = p(A\cap B^C) = p(A) - p(A\cap B)$.

Análogamente $p(B-A) = p(B\cap A^C) = p(B) - p(A\cap B)$.

Resumen de las fórmulas para calcular probabilidades.

(Sin utilizar la probabilidad total ni la fórmula de Bayes):

$p(A) =$ $\dfrac{\text{nº casos favorables a que ocurra A}}{\text{nº casos posibles de E}}$

$p(E)=1$; $0 \le p(A) \le 1$; $p(\Phi)=0$; $p(A^C) = 1 - p(A)$; $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$;

$p(B/A) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(A)}$; $p(A/B) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$; $p(A\cap B) = p(A).p(B/A) = p(B).p(A/B)$ (probabilidad del producto); **$p(A^C\cap B^C) = \{Morgan\} = p(A\cup B)^C = \{suceso\ contrario\} = 1- p(A\cup B)$; $p(A^C\cup B^C) = \{Morgan\} = p(A\cap B)^C = \{suceso\ contrario\} = 1- p(A\cap B)$;** A y B son **independientes** si **$p(A\cap B) = p(A).p(B)$**; **$p(A-B) = p(A\cap B^C) = p(A) - p(A\cap B)$ y $p(B-A) = p(B\cap A^C) = p(B) - p(A\cap B)$.**

Vamos a realizar un par de problemas de selectividad, donde a veces nos dan los datos y otras veces los tenemos que obtener nosotros.

Casi nunca hay que utilizar todas las fórmulas.

♦♦EJERCICIO 3 del Modelo 1 Opción A de los sobrantes de 2010

De dos sucesos aleatorios A y B del mismo espacio de sucesos se sabe que p(A) = 2/3, p(B) = 3/4 y $p(A\cap B)$ = 5/8. Calcule:

a) (0'75 puntos) La probabilidad de que se verifique alguno de los dos sucesos.

b) (0'75 puntos) La probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos sucesos.

c) (1 punto) La probabilidad de que ocurra A si se ha verificado B.

<u>sol</u>

Datos p(A) = 2/3, p(B) = 3/4 y $p(A\cap B)$ = 5/8

a)

La probabilidad de que se verifique alguno de los dos sucesos.

Me están pidiendo p(A ó B) = $p(A\cup B)$.

Usamos su fórmula $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B) = 2/3+3/4-5/8 = 19/24$

b)

La probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos sucesos.

Me están pidiendo p(noA y noB) = $p(A^C\cap B^C)$.

Usamos su fórmula $p(A^C\cap B^C)$ = {Morgan} = $p(A\cup B)^C$ = {suceso contrario} =

= 1- $p(A\cup B)$ = 1 - 19/24 = 5/24.

c)

La probabilidad de que ocurra A si se ha verificado B.

Me están pidiendo p(A/B).

Usamos su fórmula $p(A/B) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)} = \frac{5/8}{3/4} = 5/6$

♦♦EJERCICIO 3 Modelo 2 Opción B de los sobrantes de 2010

En un centro de enseñanza secundaria se sabe que el 45% de los alumnos juegan al fútbol, que el 60% practican atletismo, y que de los que practican atletismo el 50% juegan al fútbol.

a) (0.75 puntos) ¿Qué porcentaje de alumnos practican ambos deportes?

b) (0.75 puntos) Si se elige al azar un alumno de ese centro, ¿cuál es la probabilidad de que no practique ninguno de estos deportes?

c) (1 punto) Si un alumno de ese centro no juega al fútbol, ¿cuál es la probabilidad de que practique atletismo?

<u>sol</u>

Sean F y A los sucesos "los alumnos juegan a futbol" y "los alumnos practican atletismos".

De el 45% de los alumnos juegan al fútbol tenemos p(F) = 45% = 0'45

De el 60% de los alumnos practican atletismo tenemos p(A) = 60% = 0'6

De los que practican atletismo el 50% juegan al fútbol tenemos p(F/A) = 50% = 0'5

a)

¿Qué porcentaje de alumnos practican ambos deportes?

Me están pidiendo p(F y A) = $p(F\cap A)$

De 0'5 = $p(F/A) = \frac{p(F\cap A)}{p(A)}$, obtenemos $p(F\cap A)$ = p(A). p(F/A) = 0'6.0'5 = 0'3.

b)

Si se elige al azar un alumno de ese centro, ¿cuál es la probabilidad de que no practique ninguno de estos deportes?

Me están pidiendo p(noF y noA) = $p(F^C \cap A^C)$ = {Morgan} = $p(F \cup A)^C$ = {suceso contrario} = = 1- $p(F \cup A)$ = 1 – 0’75 = 0’25.
Necesitamos $p(F \cup A) = p(F) + p(A) - p(F \cap A)$ = 0’45 + 0’6 – 0’3 = 0’75
c)
Si un alumno de ese centro no juega al fútbol, ¿cuál es la probabilidad de que practique atletismo?
Me están pidiendo p(A/noF) = $p(A/F^C) = \frac{p(A \cap F^C)}{p(F^C)} = \frac{p(A) - p(A \cap F)}{1 - p(F)} =$ (0’6-0’3)/(1- 0’45) =

= 0’3/0’55 = 6/11.

Nota.- A veces es mas rápido utilizar una tabla de contingencia para calcular las probabilidades de las intersecciones de sucesos que forman la tabla.

♦♦Una compañía de seguros hace una investigación sobre la cantidad de partes de siniestro fraudulentos presentados por los asegurados. Clasificando los seguros en tres clases, incendio, automóvil y "otros", se obtiene la siguiente relación de datos:

El 6% son partes por incendio fraudulentos; el 1% son partes de automóviles fraudulentos; el 3% son "otros" partes fraudulentos; el 14% son partes por incendio no fraudulentos; el 29% son partes por automóvil no fraudulentos y el 47% son "otros" partes no fraudulentos.

a) Haz una tabla ordenando los datos anteriores y hallando el porcentaje total de partes fraudulentos y no fraudulentos.

b) Calcula qué porcentaje total de partes corresponde a la rama de incendios, cuál a la de automóviles y cuál a “otros”. Añade estos datos a la tabla.

c) Calcula la probabilidad de que un parte escogido al azar sea fraudulento. ¿Cuál será, en cambio, la probabilidad de que sea fraudulento si se sabe que es de la rama de incendios?

<u>Sol</u>

a) La tabla de contingencia es

	Incendio	Automóvil	otros	Total
Fraudulentos	6	1	3	10
No fraudulentos	14	29	47	90
Total	20	30	30	100

y b) es elemental pues hay 100 datos

c) Es fácil ver sobre la tabla que la probabilidad de escoger al azar un parte fraudulento es 10/100 = 10%.

La probabilidad condicionada que se pide es: p(Fraude / Incendio) = 6/20 = 0,3

Probabilidad total

Teorema de la probabilidad total

Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ un sistema de sucesos que verifican $A_i \cap A_j = \phi$ con $i \neq j$ y que

$A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ = E (suceso seguro) tales que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero, y sea B un suceso cualquiera del que se conocen las probabilidades condicionales $p(B/A_i)$, entonces la probabilidad del suceso B viene dada por la expresión:

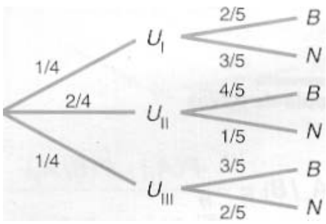
$$p(B) = p(A_1).p(B / A_1) + p(A_2).p(B / A_2) + \dots + p(A_n).p(B / A_n)$$

Nota.- La forma mejor de hacer estos problemas es utilizando un diagrama de árbol.

♦♦Se lanzan dos monedas al aire. Si salen dos caras, se extrae una bola de una urna I, que contiene 2 bolas blancas y 3 negras. Si sale cara y cruz, se extrae una bola de una urna II, que contiene 4 bolas blancas y 1 negra. Si salen dos cruces, se extrae una bola de una urna III, que contiene 3 bolas blancas y 2 negras. ¿Cuál es la probabilidad de extraer bola blanca después de lanzar las monedas y sacar la bola?

Sol

El diagrama de árbol muestra, primero, las probabilidades correspondientes a la elección de la urna y, después, a la extracción de la bola.



La probabilidad total de sacar bola blanca la calculamos caminando por todas las ramas que terminan en sacar bola blanca.

$p(B) = p(B/U_I).p(U_I) + p(B/U_{II}).p(U_{II}) + p(B/U_{III}).p(U_{III}) = 2/5.1/4 + 4/5.2/4 + 3/5.1/4 = 13/20$

Teorema de Bayes

Teorema de Bayes

Sean $A_1, A_2, \dots, A_n$ un sistema de sucesos que verifican $A_i \cap A_j = \phi$ con $i \neq j$ y que

$A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ = E (suceso seguro) tales que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero, y sea B un suceso cualquiera del que se conocen las probabilidades condicionales $p(B/ A_i)$,

Entonces las probabilidades $P(A_i /B)$ vienen dada por la expresión:

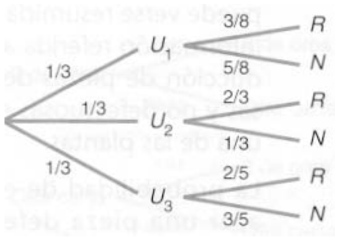
$$p(A_i / B) = \frac{p(A_i)\cdot p(B/A_i)}{p(A_1)\cdot p(B/A_1) + p(A_2)\cdot p(B/A_2) + ... + p(A_n)\cdot p(B/A_n)} = \frac{p(A_i)\cdot p(B/A_i)}{\sum_{i=1}^{n} p(A_i)\cdot p(B/A_i)}$$

Nota.- En los problemas relacionados con la probabilidad, y en particular con la probabilidad condicionada, así como con la probabilidad total y el teorema de Bayes, es aconsejable, con la información del problema, construir una **tabla de contingencia** o un **diagrama de árbol.**

♦♦ Tenemos tres urnas: U_1 con 3 bolas rojas y 5 negras, U_2 con 2 bolas rojas y 1 negra y U_3 con 2 bolas rojas y 3 negras. Escogemos una urna al azar y extraemos una bola. Si la bola ha sido roja, ¿cuál es la probabilidad de haber sido extraída de la urna U_1 ?

Sol

Llamamos R al suceso sacar bola roja y N al suceso sacar bola negra. En el diagrama de árbol siguiente pueden verse las distintas probabilidades de ocurrencia de los sucesos R o N para cada una de las tres urnas.



La probabilidad pedida es $P(U_1 /R)$. Utilizando el teorema de Bayes, tenemos:

$$p(U_1 /D) = \frac{p(U_2)\cdot p(R/M_2)}{p(U_1)\cdot p(R/U_1)+p(U_2)\cdot p(R/U_2)+p(U_3)\cdot p(R/U_3)} =$$

= (1/3 .3/8) / (1/3 .3/8 +1/3 .2/3 + 1/3.2/5) = 45/173 = 0,260