2022-2023

PROBABILIDAD

ÍNDICE TEMA IV:

5.1 INTRODUCCIÓN

La probabilidad tiene sus orígenes en los juegos de azar, principalmente los juegos con dados o cartas, que han sido siempre muy populares. Es imposible determinar con exactitud el origen de los juegos de azar; las pruebas más antiguas de utilización de tablas para los juegos de azar se remontan a los egipcios y los griegos. Muchas veces usaban estos juegos como una forma de distraer la mente de los soldados y de la población en general en periodos de guerra y asedio. Jugaban tanto los niños como los mayores. Más tarde, los romanos, también continuaron la afición a los juegos, sobre todo a los de dados, del que el propio Octavio Augusto fue un gran aficionado. De hecho, la palabra "aleatorio" vienen del término latino "alea iacta est", que era el juego de dados más extendido entre los romanos y se traduce como "la suerte está echada".

Los árabes también gustaban de jugar a los dados y dibujaban en una de las caras del dado una flor de azahar, que significaba "muerte súbita en el juego". Gracias a los cruzados este juego se extendió y la palabra "azar" pasó al castellano con un significado más suave: "suerte".

A lo largo de la historia, los juegos de azar han estado, en múltiples ocasiones, prohibidos o considerados paganos por la Iglesia Católica, aunque también ella participaba, en cierto modo, de ellos. La palabra "lot", de origen germánico, significaba "lote", "suerte", ya que era usual el empleo del azar para sortear lotes, como por ejemplo las vacantes en las jerarquías sacerdotales. De esta palabra "lot" surgió posteriormente la palabra lotería.

Fue en el siglo XV cuando los juegos de azar empezaron a ser objeto de estudio matemático. En 1539, Cardano publicó un manual del jugador en el que indicaba los comportamientos, más o menos regulares que se producían al jugar a los dados. Posteriormente, alrededor de 1650 los juegos de azar constituían la principal ocupación de la sociedad francesa. Un jugador, el caballero Méré, pidió ayuda a su amigo Pascal para conseguir las máximas ganancias jugando a los dados. Pascal, a su vez, solicitó la colaboración de Fermat y de la correspondencia que mantuvieron ambos matemáticos, para resolver los problemas planteados, surgieron las bases de la Teoría de la Probabilidad.

5.2 DEFINICIONES

- Experimento Determinista: es aquel que realizado en igualdad de condiciones se obtiene siempre el mismo resultado. Por ejemplo: medir tu altura con un metro, calcular la aceleración de vehículos que circulan a velocidad constante, …

- Experimento Aleatorio: es aquel que, realizado bajo las mismas condiciones, no se va a poder predecir su resultado. Por ejemplo: lanzar una moneda al aire, duración de una bombilla, extraer una carta de una baraja, …

Estos serán los experimentos que vamos a estudiar en este tema, los que estudia la Probabilidad.

- Espacio muestral: el espacio muestral de un experimento aleatorio es el conjunto de todos los resultados posibles del experimento. Se designa con la letra **E**.
- Punto muestral: es cada uno de los elementos que forman el espacio muestral.
- Suceso: es cada uno de los subconjuntos del espacio muestral. Se les va a notar por letras mayúsculas. Puede venir dado de forma explícita o mediante un enunciado.
- Espacio de Sucesos: es el conjunto de todos los sucesos de un experimento aleatorio, es decir, el conjunto de los subconjuntos del espacio muestral. Lo notaremos por la letra **S.**
  El número de elementos de un espacio de sucesos es 2^n, siendo n el cardinal (número de elementos) del espacio muestral.
- Decimos que un suceso A se realiza o se verifica, si al efectuar una prueba del experimento aleatorio obtenemos como resultado uno de los puntos muestrales que componen el suceso A.

EJEMPLO

Se considera el experimento aleatorio consistente en lanzar dos monedas diferentes al aire. Determinar su espacio muestral y su espacio de sucesos. Sea el suceso $A = \{XX, CC\}$, si lanzo las monedas y me sale una cara y una cruz, ¿se realizará mi suceso A?

$$E = \{XX, CC, CX, XC\}$$

$$Card(E) = 4 \Rightarrow Card(S) = 2^4 = 16$$

$$S = \left\{ \begin{matrix} \{CC\}, \{XX\}, \{CX\}, \{XC\}, \{CC, XX\}, \{CC, CX\}, \{CC, XC\}, \{XX, CX\}\{XX, XC\}, \{CX, XC\}, \\ \{CC, XX, CX\}, \{CC, XX, XC\}, \{CC, CX, XC\}, \{XX, CX, XC\}, \{CC, XX, XC, CX\}, \emptyset \end{matrix} \right\}$$

No se realiza el suceso A.

4.1. TIPOS DE SUCESOS

Tipos de sucesos:

- Suceso elemental: está formado por un solo punto muestral.
- Suceso compuesto: está formado por varios puntos muestrales.
- Suceso cierto o seguro: es aquel que se realiza siempre, por tanto, estará formado por todos los puntos muestrales del experimento. Es el espacio muestral.
- Suceso imposible: el que no se realiza nunca, por tanto, no tiene ningún punto muestral. Se representa por $\emptyset$.
- Suceso complementario: dado un suceso cualquiera A del espacio de sucesos S, se llama suceso complementario del suceso A al suceso que se realiza cuando no se realiza A. El complementario de A se nota $\bar{A} = A^c$.

  Por tanto, el complementario del suceso seguro será el suceso imposible y viceversa.

EJEMPLO

Sea el experimento aleatorio consistente en lanzar un dado. Calcular el suceso complementario del suceso $A = \{1,3\}$ y del $B = \{1,3,5\}$.

$$A^c = \{2,4,5,6\} \qquad B = \{2,4,6\}$$

1. EJERCICIO:

Construir el espacio muestral correspondiente a los siguientes experimentos aleatorios:

a) Extraer una bola de una urna que contiene bolas rojas y bolas negras, y observar su color.

b) Escribimos cada una de las letras que componen la palabra PREMIO en una ficha y las ponemos en una bolsa de la que extraemos una al azar.

d) Elegir un número del 1 al 10.

2. EJERCICIO:

Consideremos el experimento aleatorio que consiste en lanzar un dado de quinielas. Hallar el espacio muestral y el espacio de sucesos.

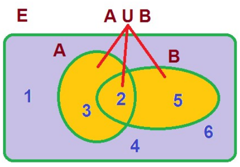
3. EJERCICIO:

Una bolsa contiene bolas rojas y negras. Se extraen sucesivamente tres bolas. Calcular el espacio muestral, suceso A= "extraer al menos una bola blanca, suceso B=" extraer una bola negra".

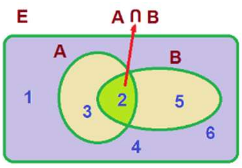
4.2. OPERACIONES CON SUCESOS Y PROPIEDADES

4.2.1. Operaciones

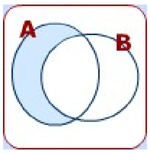
- Unión de Sucesos: dados dos sucesos A y B pertenecientes a un mismo espacio de sucesos, se define el suceso $A \cup B$ como el formado por todos los sucesos elementales de **<u>A o de B</u>**, es decir, el suceso que ocurre cuando se verifica A o se verifica B.



- Intersección de Sucesos: dados dos sucesos A y B pertenecientes a un mismo espacio de sucesos, se define el suceso $A \cap B$ como el formado por los sucesos elementales que están en **<u>A y en B</u>**, es decir, el suceso que ocurre cuando se verifica A y se verifica B.



- Diferencia de Sucesos: dados dos sucesos A y B, se define el suceso diferencia $A - B$ como el formado por los sucesos elementales que están en A, pero no en B, es decir, el suceso que ocurre cuando se verifica A y no se verifica B.



EJEMPLO

Se extrae una carta de una baraja española. Sean lo sucesos A="sacar oros", B="sacar figura " y C="sacar rey". Calcular los sucesos: $A \cup B$, $A \cap C$, $A - B$.

$$A \cup B = \left\{ \begin{array}{c} 1oros, 2oros, 3oros, 4oros, 5oros, 6oros, 7oros, sota\ oros, caballo\ oros, rey\ oros, \\ sota\ copas, caballo\ copas, rey\ copas, sota\ espadas, caballo\ espadas, rey\ espadas, \\ sota\ bastos, caballo\ bastos, rey\ bastos \end{array} \right\}$$

$$A \cap C = \{rey\ de\ oros\}$$

$$A - B = \{1oros, 2oros, 3oros, 4oros, 5oros, 6oros, 7oros\}$$

4. EJERCICIO:

Un experimento aleatorio consiste en lanzar un dado y anotar su resultado.

a) Construir el espacio muestral de dicho experimento.

b) Sean los sucesos: $A = \{2,5,6\}$; $B = \{1,3,4,5\}$; $C = \{4,5,6\}$; $D = \{3\}$. Formar los sucesos contrarios.

c) A partir de los sucesos anteriores, calcular:

$A \cup B$ $A \cap C$ $B \cup C$ $A \cup (B \cap C)$ $(A \cup B)^c$

$A^c \cap B^c$ $(A \cap B)^c$ $A^c \cup B^c$ $A \cup (B \cap C^c)$ $A \cap (B \cap C^c)$

$A^c \cap (B \cap C)$ $(A \cap B)^c \cap C$

5. EJERCICIO:

Sean A, B y C tres sucesos cualesquiera de un espacio de sucesos. Se pide expresar en función de dichos sucesos y de sus complementarios, los siguientes sucesos:

a) Se realizan A y B.

b) Se realizan A y B, pero no C.

c) Se realiza al menos uno de los tres sucesos.

d) No se realiza ninguno de los tres sucesos.

4.2.2. Propiedades de la unión e intersección de sucesos:

- Propiedad Conmutativa: $\forall\ A\ y\ B \in S \Longrightarrow \begin{cases} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{cases}$

- Propiedad Asociativa: $\forall\ A\ , B\ y\ C \in S \Longrightarrow \begin{cases} A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \end{cases}$

- Propiedad Idempotente: $\forall\ A\ \in S \Longrightarrow \begin{cases} A \cup A = A \\ A \cap A = A \end{cases}$

- Propiedad Simplificativa: $\forall\ A\ y\ B \in S \Longrightarrow \begin{cases} A \cup (B \cap A) = A \\ A \cap (B \cup A) = A \end{cases}$
- Propiedad del complementario: $\forall\ A\ \in S \Longrightarrow \begin{cases} A \cup A^c = E \\ A \cap A^c = \emptyset \end{cases}$
- Propiedad Distributiva: $\forall\ A, B\ y\ C \in S \Longrightarrow \begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases}$

- Leyes de "De Morgan": $\forall\ A\ y\ B \in S \Longrightarrow \begin{cases} (A \cup B)^c = A^c \cap B^c \\ (A \cap B)^c = A^c \cup B^c \end{cases}$

4.2.3. Incompatibilidad de sucesos

Dados los sucesos A y B, decimos que son incompatibles si su intersección es el conjunto vacío, es decir, no tienen ningún elemento en común.
Dos sucesos A y B serán compatibles en caso contrario, es decir, cuando tienen puntos muestrales en común.

$$\begin{cases} A\ y\ B\ incompatiles\ \Rightarrow A \cap B = \emptyset \\ A\ y\ B\ compatiles\ \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset \end{cases}$$

4.3. DEFINICIÓN DE PROBABILIDAD

A continuación, vamos a dar tres definiciones de probabilidad. Cada una de ellas va a "mejorar" la anterior.

- Ley de los Grandes Números: es una definición de probabilidad que se basa en la experimentación, es decir, en la realización de un experimento un número infinito de veces.

Por tanto, el problema que va a presentar esta definición de probabilidad es que no resulta operativa.

La frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse en torno a un número, a medida que el número de pruebas del experimento crece indefinidamente. A ese número lo llamaremos probabilidad del suceso A y lo notaremos como $p(A)$. Matemáticamente: $p(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(A)}{n}$

EJEMPLO

Lanzamos una moneda al aire y anotamos el número de caras que aparecen:

Nº Pruebas	10	30	60	90	130	180	200
n_i	6	16	31	48	68	92	101
f_i	0.6	0.533	0.517	0.533	0.523	0.511	0.505

- Definición de Probabilidad de Laplace: En el caso en que los sucesos elementales sean equiprobables, igual probabilidad, Laplace definió la probabilidad de un suceso A como el cociente entre el número de resultados favorables a que ocurra el suceso A y el número de resultados posibles del experimento.

$$p(A) = \frac{casos\ favorables\ al\ suceso\ A}{casos\ posibles}$$

El problema que plantea esta definición es que si los sucesos elementales no son equiprobables no se puede aplicar.

EJEMPLO

Sea el experimento aleatorio consistente en lanzar un dado al aire y anotar su resultado. Calcular la probabilidad de los sucesos $A = \{1,3\}$ y del $B = \{1,3,5\}$.

$$p(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \qquad\qquad p(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

- Definición axiomática o de Kolmogorov: Se llama probabilidad a una ley que asocia a cada uno de los sucesos A de un espacio de sucesos, un número real que llamaremos probabilidad de A y representaremos por $p(A)$, que cumple los siguientes axiomas:
  1. La probabilidad de un suceso cualquiera del espacio de sucesos es positiva o nula.

$$\forall A \in S, \qquad p(A) \geq 0$$

  2. La probabilidad del suceso seguro es igual a la unidad.

$$p(E) = 1$$

3. La probabilidad de dos sucesos incompatibles es igual a la suma de las probabilidades de cada uno de ellos.

$$\forall A \ y \ B \in S / \ \ A \cap B = \emptyset \Longrightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

Consecuencias de esta definición:

- La probabilidad es un número entre cero y uno, ambos inclusive.

$$\forall A \in S \Longrightarrow 0 \leq p(A) \leq 1$$

- La probabilidad del suceso complementario es uno menos la probabilidad del suceso.

$$\forall A \in S \Longrightarrow p(A^c) = 1 - p(A)$$

- La probabilidad del suceso imposible es cero.

$$p(\emptyset) = 0$$

- Si un suceso está incluido en otro, entonces su probabilidad es menos que la del suceso en el que está incluido.

$$\forall A \ y \ B \in S / A \subset B \Rightarrow p(A) \leq p(B)$$

EJEMPLO

Sea $E = \{a, b, c\}$ el espacio de sucesos elementales de un experimento aleatorio. ¿Cuáles de estas funciones definen una función de probabilidad? Justifica tu respuesta.

a) $p(a) = \frac{1}{2}$ $\quad p(b) = \frac{1}{3}$ $\quad p(c) = \frac{1}{6}$

b) $p(a) = \frac{3}{4}$ $\quad p(b) = \frac{1}{4}$ $\quad p(c) = \frac{1}{4}$

c) $p(a) = \frac{1}{3}$ $\quad p(b) = \frac{1}{3}$ $\quad p(c) = -\frac{2}{3}$

4.4. PROBABILIDAD DE LA UNIÓN DE SUCESOS

La probabilidad de la unión de sucesos va a depender de que dichos sucesos sean incompatibles o no. Así pues:

- Probabilidad de la unión de sucesos incompatibles: es igual a la suma de las probabilidades de cada uno de los sucesos:

$$\forall A y \ B \in S \ \ / A \cap B = \emptyset \Rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

En general:

$$\forall A_1, A_2, \dots, A_n \in S \ \ tal\ que \ \begin{pmatrix} A_1 \cap A_2 = \emptyset \\ A_1 \cap A_3 = \emptyset \\ \dots \\ A_{n-1} \cap A_n = \emptyset \end{pmatrix} \Longrightarrow p(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$$
$$= p(A_1) + \cdots + p(A_n)$$

- Probabilidad de la unión de sucesos compatibles: es igual a la probabilidad del primer suceso más la probabilidad del segundo menos la probabilidad de la intersección de ambos:

$$\forall A y\ B \in S \ \ / \ \ A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Para tres sucesos:

$$\forall A, B\ y\ C \in S\ y\ son\ Compatibles\ \ \Rightarrow p(A \cup B \cup C)$$
$$= p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) - p(B \cap C) - p(A \cap C) + p(A \cap B \cap C)$$

EJEMPLO

Se extrae una carta de una baraja española. Calcular la probabilidad de los sucesos A="ser figura o as" y B="ser copas o figura".

Como en el suceso A ser figura o as son dos sucesos incompatibles $\Rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B) = \frac{12}{40} + \frac{4}{40} = \frac{16}{40} = \frac{2}{5}$.

Como el suceso B está formado por dos sucesos compatibles $\Rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{10}{40} + \frac{12}{40} - \frac{3}{40} = \frac{19}{40}$.

4.5. PROBABILIDAD CONDICIONADA. INDEPENDENCIA DE SUCESOS

Sean A y B dos sucesos pertenecientes al espacio de sucesos y que cumplen que la probabilidad del suceso a es distinta de cero. Se llama probabilidad de un suceso B condicionada a A, $p\left({}^{B}/_{A}\right)$, a la probabilidad de que ocurra el suceso B dado (sabiendo) que ha sucedido el suceso A. Se obtiene a partir del siguiente cociente:

$$p\left({}^{B}/_{A}\right) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)}\ , \quad p(A) \neq 0$$

EJEMPLO

Se extraen dos bolas, consecutivamente, de una urna que contienen nueve bolas rojas y cinco negras. Calcular la probabilidad de que la segunda bola sea negra si la primera ha sido roja.

$N_2 = segunda\ bola\ negra$

$B_1 = primera\ bola\ roja$

$$p\left({N_2}/{B_1}\right) = \frac{5}{13}$$

Dos sucesos son independientes, cuando el saber que ha ocurrido un suceso A, no modifica la probabilidad de que ocurra el suceso B. Por tanto, dos sucesos A y B serán independientes cuando:

$$p\left({B}/{A}\right) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \Rightarrow p(A \cap B) = p(A) \cdot p\left({B}/{A}\right) = p(A) \cdot p(B)$$

$$A\ independiente\ de\ B \Rightarrow p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

En caso contrario los sucesos serán dependientes.

EJEMPLO

Se extraen dos bolas de una urna que contienen nueve bolas rojas y cinco negras. Calcular la probabilidad de que la segunda bola sea negra si la primera ha sido roja, con reemplazamiento y sin reemplazamiento

$N_2 = segunda\ bola\ negra$

$B_1 = primera\ bola\ roja$

Sin reemplazamiento son dependientes, entonces $p\left({N_2}/{B_1}\right) = \frac{5}{13}$

Con reemplazamiento son independientes, entonces $p\left({N_2}/{B_1}\right) = \frac{5}{14}$

4.6. PROBABILIDAD DE LA INTERSECCIÓN DE SUCESOS

A partir de lo anterior, vamos a poder definir la probabilidad de la intersección de sucesos. Hay que distinguir dos casos:

- Si los sucesos son independientes, la probabilidad de la intersección de los sucesos será igual al producto de las probabilidades.

$$A\ independiente\ de\ B \Rightarrow p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

- Si los sucesos son dependientes, la probabilidad de la intersección será igual a la probabilidad de uno de ellos por la probabilidad del otro condicionado al primero.

$$A\ independiente\ de\ B \Rightarrow p(A \cap B) = p(A) \cdot p\left({}^{B}/_{A}\right)$$

En general, sean $A_1, A_2, \dots, A_n$, n sucesos pertenecientes al mismo espacio de sucesos y que cumplen que la probabilidad de la realización simultánea de los n sucesos es no nula y además son dependientes, entonces la probabilidad de la intersección de esos n sucesos será igual:

$$p(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = p(A_1) \cdot p\left({}^{A_2}/_{A_1}\right) \cdot p\left({}^{A_3}/_{A_1 \cap A_2}\right) \dots \dots p\left({}^{A_n}/_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}\right)$$

EJEMPLO

Se extraen dos cartas de una baraja española de cartas. Calcular la probabilidad de obtener dos reyes, si se repone la carta y si no se repone.

$R_1 = primera\ carta\ rey$

$R_2 = segunda\ carta\ rey$

Sin reemplazamiento son dependientes, entonces $p(R_1 \cap R_2) = p(R_1) \cdot p\left({}^{R_2}/_{R_1}\right) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} = \frac{12}{1560} = 0.007$

Con reemplazamiento son independientes, entonces $p(R_1 \cap R_2) = p(R_1) \cdot p(R_2) = \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{40} = \frac{16}{1600} = 0.01$

4.7. TABLAS DE CONTINGENCIA

Es un método muy útil para clasificar los datos obtenidos en un recuento. Son tablas de doble entrada que se denominan tablas de contingencia.

EJEMPLO

Se sortea un viaje a Caribe entre los 120 mejores clientes de una agencia de viajes. De ellos, 65 son mujeres, 80 están casados y 45 son mujeres casadas. Calcular la probabilidad de que le toque el viaje a un hombre soltero. Si el afortunado se sabe que está casado, calcular la probabilidad de que sea mujer.

	Hombre (H)	Mujer (H^c)	
Casado (C)	35	45	80
Soltero (C^c)	20	20	40
	55	65	120

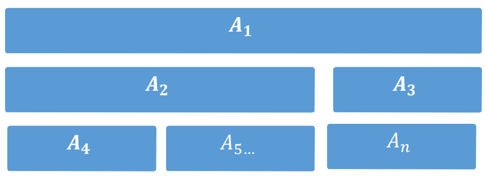
$$p(H \cap C^c) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$$

$$p\left({H^c}/{C}\right) = \frac{45}{80} = \frac{9}{16}$$

4.8. TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL

Se define un sistema completo de sucesos a un conjunto de sucesos incompatibles dos a dos y cuya unión es el total.

E

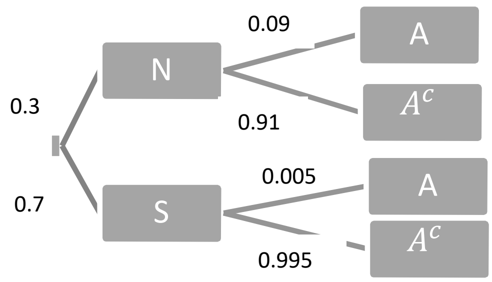


Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$, un sistema completo de sucesos tal que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero, y sea B un suceso cualquiera para el que se conocen las probabilidades $p({B}/{A_i})$, entonces la probabilidad del suceso B viene dada por la siguiente expresión:

$$p(B) = p(A_1) \cdot p\left({B}/{A_1}\right) + p(A_2) \cdot p\left({B}/{A_2}\right) + \cdots + p(A_n) \cdot p\left({B}/{A_n}\right)$$

EJEMPLO

Se sabe que la probabilidad de que un autobús sufra un accidente en día nublado es 0.09 y en día seco 0.005. Durante un período de diez días ha habido 7 días secos y 3 nubosos. ¿Cuál será la probabilidad de que se produzca un accidente?



$$p(A) = p(N) \cdot p(A/_N) + p(S) \cdot p(A/_S) = 0.3 \cdot 0.09 + 0.7 \cdot 0.005 = 0.0305$$

4.9. TEOREMA DE BAYES

Sean $A_1, A_2, \dots, A_n$, un sistema completo de sucesos tal que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero, y sea B un suceso cualquiera para el que se conocen las probabilidades $p(B/_{A_i})$. El Teorema de Bayes establece que las probabilidades $p(A_i/_B)$ vienen dadas por la siguiente expresión:

$$p\left(A_i/_B\right) = \frac{p(A_i) \cdot p\left(B/_{A_i}\right)}{p(A_1) \cdot p\left(B/_{A_1}\right) + p(A_2) \cdot p\left(B/_{A_2}\right) + \cdots + p(A_n) \cdot p\left(B/_{A_n}\right)}$$

EJEMPLO

Se sabe que la probabilidad de que un autobús sufra un accidente en día nublado es 0.09 y en día seco 0.005. Durante un período de diez días ha habido 7 días secos y 3 nubosos. ¿Cuál será la probabilidad de que sabiendo que se ha producido un accidente el día sea seco?

$$p(S/_A) = \frac{p(S) \cdot p(A/_S)}{p(N) \cdot p\left(A/_N\right) + p(S) \cdot p\left(A/_S\right)} = \frac{0.7 \cdot 0.005}{0.0305} = 0.1148$$

6. **EJERCICIO:**

Un experimento consiste en lanzar un dado y extraer una bola de una urna que contiene una bola blanca y una negra. Se pide:

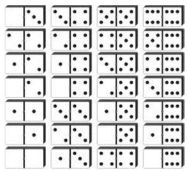
a) Construir el espacio muestral asociado a dicho experimento.

b) Construir y calcular la probabilidad de los sucesos: A=" Obtener un número par y una bola negra" y B =" Obtener un múltiplo de tres y una bola blanca".

7. **EJERCICIO:**

Extraemos una ficha de un dominó. Calcular la probabilidad de:

a) La suma de puntos sea igual a 6.



b) La suma de puntos sea menor que 4.

c) Sea una ficha "doble".

8. **EJERCICIO:**

En la lotería primitiva, ¿cuál es la probabilidad de que los seis números extraídos sean pares?

9. **EJERCICIO:**

En una bolsa hay 3 bolas rojas y 4 azules. Se extraen dos bolas de la urna. Calcular la probabilidad:

a) Dos azules. b) Dos rojas. c) Una roja y otra azul.

Hacer el ejercicio en los casos en que las bolas se extraigan de forma consecutiva y devolviendo la primera bola extraída a la urna y luego sacando otra.

10. **EJERCICIO:**

En una ruleta de un casino, una bola puede caer en cualquiera de las casillas numeradas desde el 0 hasta el 36. Hay 18 casillas rojas, 18 casillas negras y una blanca (la del cero). Se hace girar la ruleta. Calcular la probabilidad de que la bola caiga:

a) En una casilla de color negro.

b) En una casilla numerada con un número par estrictamente mayor que 29.

c) En la casilla 0.

11. EJERCICIO:

En una urna hay 75 bolas entre blancas, rojas y azules. ¿Cuántas hay de cada color si la probabilidad de sacar una bola blanca es de 3/5 y la de sacar roja es de 1/15? ¿Y si la probabilidad de sacar azul fuera 1/5 y la de sacar roja, el doble?

12. EJERCICIO:

Un dado está trucado de forma que la probabilidad de obtener las distintas caras es inversamente proporcional a los números de éstas. Se pide:

a) Probabilidad de cada una de las caras.
b) La probabilidad de sacar número par.

13. EJERCICIO:

Se extraen, al azar y sin reposición, cuatro bolas numeradas del uno al cuatro, de una urna. ¿Cuál es la probabilidad de que salgan ordenadas?

14. EJERCICIO:

Determinar si los sucesos A y B son compatibles o incompatibles: $p(A) = \frac{1}{4}$; $p(B) = \frac{1}{2}$ y $p(A \cup B) = \frac{2}{3}$.

15. EJERCICIO:

De una caja que contiene 12 artículos, 4 de los cuales son defectuosos, se eligen consecutivamente dos al azar. Hallar la probabilidad de:

a) Que los dos sean defectuosos. b) Que al menos uno sea defectuoso.

16. EJERCICIO:

El cajón de Pepa contiene 4 calcetines negros, 6 marrones y dos azules. Esta mañana a las 7, Pepa estaba dormida y tomó dos calcetines al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos sean negros? ¿Y de qué sean del mismo color? ¿Y la de qué uno sea azul y otro negro?

17. EJERCICIO:

Un gato persigue a un ratón. Este puede huir por tres callejones, A, B y C. En cada uno de ellos puede ser o no cazado.

a) Construir el espacio muestral.
b) Sean los sucesos: A =" entrar en A"; B="entrar en B" y C="entrar en C". Las probabilidades de dichos sucesos son: p(A)=0.3; p (B)=0.5 y p(C)=0.2; y la probabilidad de ser cazado en A es de 0.4, en B es 0.6 y en C de 0.1. Calcular la probabilidad de que el gato atrape al ratón.
c) Sabiendo que el ratón ha sido atrapado, ¿cuál es probabilidad de que haya sido en C?

18. EJERCICIO:

En una clase el 60% de los alumnos aprobó Historia y la mitad de la clase aprobó Inglés. Se sabe que el 70% de los alumnos que aprobaron Historia aprobó Inglés.

a) Calcule la probabilidad de que un alumno cualquiera de la citada clase apruebe al menos una de las dos asignaturas.

b) Calcule el porcentaje de alumnos que, habiendo aprobado Inglés, aprueban Historia.

c) ¿Son independientes los sucesos “aprobar Historia” y “aprobar Inglés”?

19. EJERCICIO:

El 40% de los habitantes de una ciudad va al cine, el 30% va al teatro y el 20% a ambos.

a) Si una persona de esa ciudad no va al cine, ¿cuál es la probabilidad de que tampoco vaya al teatro?

b) Si una persona no va al teatro, ¿cuál es la probabilidad de que vaya al cine?

20. EJERCICIO:

Sean A y B dos sucesos aleatorios. Se conoce la probabilidad de $p(A) = 0.4$ y la probabilidad de $p(A \cup B) = 0.7$. Sea $p(B) = p$. ¿Para qué valor de “p” son los sucesos A y B incompatibles? ¿Y para qué valor de “p” son los sucesos A y B independientes?

21. EJERCICIO:

En un hotel hay 200 clientes, de los cuales 40 son españoles y el resto extranjeros. De los españoles, 5 son rubios, mientras que de los extranjeros lo son el 40%.

a) Tabla de contingencia.

b) Llaman por teléfono a recepción a un cliente extranjero, ¿qué probabilidad tiene de que sea rubio?

c) Llaman por teléfono otra vez, ¿qué probabilidad hay de que sea español o rubio?

22. EJERCICIO:

Una empresa que fabrica latas de refrescos utiliza cuatro máquinas distintas. Con la primera máquina se fabrica el 60% de la producción, con la segunda el 20%, con la tercera el 15% y con la cuarta el 5%. Las máquinas fabrican un porcentaje de latas defectuosas del 1%, 2%, 3% y 5% respectivamente. Si se escoge una lata al azar ¿cuál es la probabilidad de que no sea defectuosa? Sabiendo que la lata era defectuosa ¿qué probabilidad hay de que haya sido fabricada por la máquina cuarta?

23. EJERCICIO:

Sean dos sucesos a y b tales que $p(A) = 0,25, p(B) = 0,6 \ \ y \ p(A \cap B^c) = 0,1$.

a) Calcule la probabilidad de que ocurra A y ocurra B.

b) Calcule la probabilidad de que no ocurra A pero sí ocurra B.

c) Calcule la probabilidad de que ocurra A sabiendo que ha ocurrido B.

d) ¿Son independientes A y B?

24. EJERCICIO:

Ana hace la compra 7 días al mes. Dos de las veces que hace la compra es On-line. Los productos que compra Ana tienen descuento el 20% de los días que compra On-line, mientras que tienen descuento el 25% de los días que no compra On-line. Elegido un día de compras al azar,

a) ¿cuál es la probabilidad de que los productos tengan descuentos?

b) si tienen descuento, ¿cuál es la probabilidad de que haya hecho la compra On-line?

c) ¿cuál es la probabilidad de que no haya comprado On-line y que no tengan descuento los productos?

25. EJERCICIO:

Tenemos tres cajas, una verde, una roja y otra amarilla, y en cada una de ellas hay una moneda. La moneda de la caja verde está trucada y la probabilidad de que salga cara es el doble de la probabilidad de que salga cruz. La moneda de la caja roja tiene dos caras. Y la moneda de la caja amarilla no está trucada. Se toma al azar una caja y se lanza la moneda que está en esa caja.
Calcula razonadamente:

a) Espacio muestral del experimento
b) Probabilidad de obtener cara.
c) La probabilidad de que sabiendo que ha salido cara, se haya lanzado la moneda de la caja roja.

26. EJERCICIO:

Según cierto estudio, el 40% de los hogares europeos tienen contratado el asceso a Internet, el 33% tienen contratada la televisión por cable, y el 20% dispone de ambos servicios. Se selecciona un hogar europeo al azar.

a) Probabilidad de que solo tenga contratado un único servicio.
b) Si tiene contratado Internet, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga contratada la televisión por cable?
c) Son los sucesos tener contratado Internet y tener contratada la televisión por cable independientes.